Matematička indukcija

- Empirijska indukcija

Индукција је метод закључивања којим се из ставова који се односе на одређен (ограничен) број појединих случајева исте врсте изводи један општи став.

Овај метод је често примењив у природним наукама.

Због закључивања које се спроводи на овакав начин, ова индукција се зове емпиријска или непотпуна индукција.

Овом индукцијом се често долази и до неистинитих закључака, али њена улога је ипак значајна.

Princip matematičke indukcije isključuje mogućnost greške, koja može da se pojavi u empirijskoj indukciji, jer se odnosi na sve moguće slučajeve.

- Neka je $T(n)$ teorema čija formulacija sadrži prirodni broj *n*.

1. Ako je teorema $T(n)$ tačna za $n=1$,
2. pod pretpostavkom da je tačna za bilo koji prirodni broj $n=k$,
3. ako dokažemo da važi za $n=k+1$,

onda je teorema $T(n)$ tačna za sve prirodne brojeve.

Primer:

Dokazati da važi jednakost:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, n\in N.$$

1. Za $n=1$ imamo $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$, jednakost je tačna.

2. Za $n=k$ imamo $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

   Pretpostavljamo da je jednakost tačna.

3. Za $n=k+1$ je $1+2+3+\ldots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Treba da dokažemo, pod pretpostavkom 2, da je ovajednakost tačna.
Ako obema strana jednakosti 2 dodamo sabirak k+1 dobijamo

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=(k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Primer:

Dokazati da je izraz $6^n - 5n + 4$ deljiv sa 5

1. Za $n = 1$ imamo $6 - 5 + 4 = 5$, 5 je deljivo sa 5.
2. Za $n = k$ imamo $6^k - 5k + 4$, pretpostavljamo da je izraz deljiv sa 5.
3. Za $n = k + 1$ je $6^{k+1} - 5(k+1) + 4$, i treba da ispitamo deljivost sa 5 , pod pret-postavkom 2.

$$6^{k+1} - 5(k+1) + 4 = 6^k \cdot 6 - 5k - 5 + 4 \pm 6 \cdot 5k \pm 6 \cdot 4 =$$

$$6\left(6^k - 5k + 4\right) + 25k - 25$$

kako je svaki sabirak ovog izraza deljiv sa 5, proizilazi i da je ceo zbir deljiv sa 5, odakle zaključujemo da je formula tačna za sve prirodne brojeve.

Binomna formula

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots n$ čita se *n –faktorijel*

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$

$\binom{n}{k}$- čita se *n nad k* I naziva **binomni koeficijent** za $0 \leq k \leq n$ definiše se sa

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}$

Ako je $k > n$ $\binom{n}{k} = 0 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$

Stav: Ako je $k \leq n \quad k, n \in N$ onda je

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Binomni koeficijent

- **Primer**:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!}$$

$$= \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)(\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5})}$$

$$= \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$= 126$$

BINOMNA FORMULA

Binomna formula glasi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}b^k \quad n\,,k \in N$$

- **Primer: Razviti binom:** $(x+y)^4$

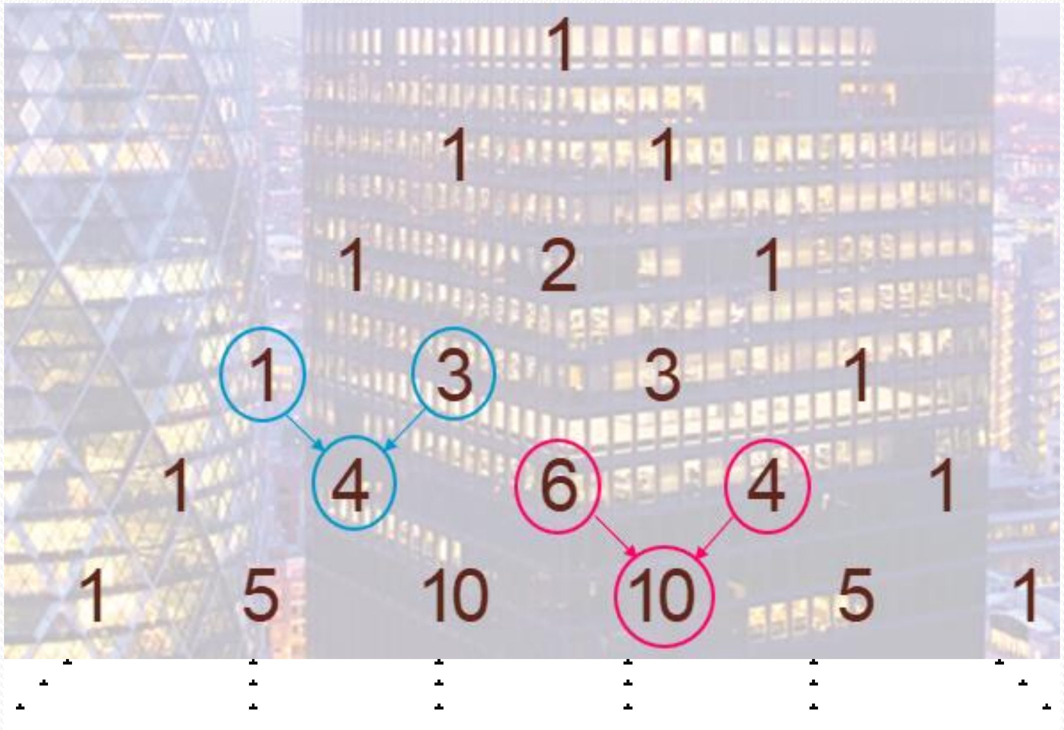
Rešenje: Po binomnoj formuli je

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

$$\binom{4}{0}=1 \quad \binom{4}{1}=4 \quad \binom{4}{2}=6 \quad \binom{4}{3}=4 \quad \binom{4}{4}=1$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Paskalov trougao



Paskalov trougao

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad . \quad . \quad . \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$